ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ИСПЫТАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ В МГУ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

В этой статье приведены варианты вступительных экзаменов по математике, проводимых в МГУ им. М.В. Ломоносова в 2010 году*.

Ключевые слова: вступительные экзамены, МГУ им. М.В. Ломоносова.

Механико-математический факультет

Вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^y = 4^x + 8 \\ y = \dfrac{x+1}{\log_2 x}. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1-x}{x} > \sqrt{\frac{3x-2}{3x+4}}.$$

3. Найдите наименьшее из положительных значений функции

$$\frac{4}{3\cos^2 x + 2\sin x - 1}.$$

4. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $\angle ABC = \dfrac{\pi}{12}$, $BC = 5$, $2AC > AB$, медиана CD образует со стороной AC треугольника угол величиной $\dfrac{5\pi}{12}$.

5. Из лесу выскочил заяц и помчался по прямой в направлении тернового куста. На полпути до куста заяц напоролся на колючку и стал бежать в полтора раза медленнее. Когда зайцу оставалось до куста 50 метров, из лесу (из того же места) выбежал волк и погнался за зайцем. Когда заяц добежал до куста, волку оставалось до него 10 метров. На каком расстоянии от леса находится терновый куст, если известно, что волк все время бежал со скоростью, с которой первоначально бежал заяц?

6. В основании параллелепипеда лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 1$ и $BC = 4$, боковые ребра параллелепипеда AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 перпендикулярны основанию и равны 1. Сфера касается прямой DC_1 в точке C_1, прямой DB_1 в точке, лежащей внутри отрезка DB_1, и проходит через точку D_1. Найдите радиус сферы.

Вариант 2

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x+1)^y = 8 + 3^{2-x} \\ y = \dfrac{x}{\log_3(x+1)}. \end{cases}$$

8. Решите неравенство

$$\frac{x+3}{x+6} + \sqrt{\frac{x-2}{x+4}} > 0.$$

---

* С более широким набором вариантов вступительных экзаменов по математике можно ознакомиться в пособии: Задачи вступительных испытаний по математике в МГУ им. М.В. Ломоносова в 2010 году (с решениями) : учеб. пособие. – М. : Изд-во МГУ, 2010. – 56 с.

9. Найдите наибольшее из отрицательных значений функции

$$\frac{3}{2\sin x - \cos 2x}.$$

10. Длина основания PS трапеции $PQRS$ равна 2. Ее диагонали PR и QS пересекаются в точке T, причем $TS = 2QT$. Кроме того $\angle PSQ = \angle QPR = 30°$. Найдите длины боковых сторон PQ и RS трапеции, если известно, что они различны.

11. Два солдата-срочника красили забор: Андрей с внутренней стороны, а Борис – с внешней. Когда Андрей выполнил три четверти работы, к нему подошел приятель Дмитрий и стал отвлекать разговорами, отчего Андрей стал красить в три раза медленнее. Когда Андрей покрасил первые 14 метров, к своей работе приступил Борис, и работал он все время с той же скоростью, с какой начал красить Андрей. Когда Андрей закончил работу, Борису оставалось покрасить всего 2 метра. Какова длина забора?

12. Основанием треугольной пирамиды служит правильный треугольник ABC со стороной $\sqrt{3}$, боковые ребра AS, BS, CS равны 5. Точка D – середина ребра AC. Сфера касается прямой BD в точке D, прямой BS в точке, лежащей внутри отрезка BS, и проходит через точку A. Найдите радиус сферы.

Ответы и решения

1. Ответ. $x = 2$, $y = 3$.

Решение. Для каждого решения системы выполняются условия $x > 0$, $x \neq 1$. Кроме того, имеем

$$x^y = 2^{y\log_2 x} = 2^{x+1}.$$

Поэтому первое уравнение системы может быть переписано в виде

$$3 \cdot 2^{x+1} = 4^x + 8.$$

Обозначив $t = 2^x$, уравнение можно переписать как $t^2 - 6t + 8 = 0$. Корнями этого квадратного уравнения являются два числа $t_1 = 2$, $t_2 = 4$. Уравнения $2^x = 2$ и $2^x = 4$ имеют корнями числа $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Первый корень не удовлетворяет определенным выше условиям. Значит, $x = 2$ и $y = \frac{2+1}{\log_2 2} = 3$. Проверкой убеждаемся, что найденная пара чисел действительно есть решение данной системы уравнений.

2. Ответ. $\frac{2}{3} \le x < \frac{4}{5}$.

Решение. Все решения удовлетворяют неравенствам

$$\frac{1-x}{x} > 0, \quad \frac{3x-2}{3x+4} \ge 0,$$

Множество решений первого из них имеет вид $0 < x < 1$. Второму же удовлетворяют числа $x < -\frac{4}{3}$ и $x \ge \frac{2}{3}$. Значит, множество решений исходного неравенства содержится в промежутке $\frac{2}{3} \le x < 1$. На этом промежутке данное неравенство равносильно неравенству

$$\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 > \frac{3x-2}{3x+4}$$

и неравенству

$$(1 - x)^2(3x + 4) > x^2(3x - 2).$$

После упрощений это неравенство принимает вид $4 - 5x > 0$. Из его решений в промежуток $\frac{2}{3} \le x < 1$ попадают лишь точки, удовлетворяющие неравенствам $\frac{2}{3} \le x < \frac{4}{5}$.

3. Ответ: $\frac{12}{7}$.

Решение. Пусть x – значение аргумента, при котором данная функция принимает положительное значение. Тогда

$$0 < 3\cos^2 x + 2\sin x - 1 =$$
$$= -3\sin^2 x + 2\sin x + 2 =$$

$$= -3\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{7}{3} \le \frac{7}{3},$$

и

$$\frac{4}{3\cos^2 x + 2\sin x - 1} \ge \frac{4}{\frac{7}{3}} = \frac{12}{7}.$$

Значение $\frac{12}{7}$ принимается при $\sin x = \frac{1}{3}$.

4. Ответ. $\frac{25}{4}$.

Решение. Обозначим величину угла BAC буквой α. Сумма углов треугольника равна π, поэтому

$$\angle DCB = \pi - \frac{\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Высоты треугольников ADC и BDC, проведенные из вершины C, совпадают. Поэтому имеем равенство

$$AC\sin\alpha = BC\sin\frac{\pi}{12}. \qquad (1)$$

Медиана CD делит площадь треугольника ABC пополам, поэтому высоты треугольников ADC и BDC, проведенные на их общее основание CD, равны. Приравнивая их длины, получаем равенство

$$BC\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = AC\sin\frac{5\pi}{12}. \qquad (2)$$

Перемножая почленно равенства (1) и (2), сокращая затем получившееся равенство на $AC \cdot BC$, находим

$$\sin\alpha\cos\alpha = \sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$$

$$\text{или} \quad \sin 2\alpha = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

По условию выполняется неравенство $AC > AD$, значит, $\angle ADC > \angle ACD$ или $\frac{7\pi}{12} - \alpha > \frac{5\pi}{12}$. Итак, $\alpha < \frac{\pi}{6}$, так что $2\alpha = \frac{\pi}{6}$ и $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

Итак, углы треугольника ABC, прилежащие к стороне AB, равны по $\frac{\pi}{12}$. Значит, этот треугольник равнобедренный, то есть $AC = BC = 5$ и $\angle ACB = \frac{5\pi}{6}$. Искомая площадь треугольника равна

$$S = \frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{25}{4}.$$

Заметим, что равенство (1) можно получить также с помощью теоремы синусов, примененной к треугольнику ABC, а (2) следует из равенства площадей треугольников ADC и DBC.

Второе решение. Обозначим величину угла BAC буквой α. Тогда

$$\angle CDB = \frac{5\pi}{12} + \alpha,$$

$$\angle ACB = \pi - \frac{\pi}{12} - \alpha = \frac{11\pi}{12} - \alpha$$

$$\text{и} \quad \angle DCB = \angle ACB - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Применяя к треугольнику ABC теорему синусов, находим

$$\frac{AB}{\sin\left(\frac{11\pi}{12} - \alpha\right)} = \frac{5}{\sin\alpha} \quad \text{и}$$

$$AB = 5\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right)}{\sin\alpha}. \qquad (3)$$

Точно так же применяя теорему синусов к треугольнику BCD, находим

$$\frac{BD}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{5}{\sin\left(\frac{5\pi}{12} + \alpha\right)} \quad \text{и}$$

$$BD = 5\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\left(\frac{5\pi}{12} + \alpha\right)}. \qquad (4)$$

Согласно условию точка D делит сторону AB пополам, поэтому

$$5\cdot\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}+\alpha\right)}{\sin\alpha}=10\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\left(\frac{5\pi}{12}+\alpha\right)}$$

и

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}+\alpha\right)=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Стоящее слева произведение синусов можно преобразовать в разность косинусов двух углов, а правое произведение представить в виде синуса двойного угла. Имеем

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right)=\sin 2\alpha$$

и $\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$. По условию выполняется неравенство $AC > AD$, значит, $\angle ADC >$ $> \angle ACD$ или $\frac{7\pi}{12}-\alpha>\frac{5\pi}{12}$. Итак, $\alpha<\frac{\pi}{6}$, так что $2\alpha=\frac{\pi}{6}$ и $\alpha=\frac{\pi}{12}$.

Из равенства (3) находим $AB=\frac{5}{2\sin\alpha}$ и, наконец, площадь треугольника

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\frac{\pi}{12}=\frac{25}{4}.$$

5. Ответ. 80 м.

Решение. Обозначим буквой S расстояние в метрах от леса до тернового куста и буквой v первоначальную скорость зайца в метрах в минуту. Скорость, с которой волк догонял зайца, также равна v метров в минуту. Возможны два случая.

а) Предположим, что расстояние от леса до тернового куста превосходит или равно 100 метров. Тогда волк выбежал из леса уже после того, как заяц наступил на колючку. Значит, заяц бежал последние 50 метров со скоростью $\frac{2}{3}v$ метров в минуту и потратил на это $\frac{50}{\left(\frac{2}{3}v\right)}=\frac{75}{v}$ минут. За это время волк пробежал $v\cdot\frac{75}{v}=75$ метров. Учитывая же, что ему осталось добежать до куста 10 метров, заключаем, что расстояние от леса до куста равно 85 метров, вопреки нашему предположению. Значит, этот случай невозможен.

б) Итак, расстояние от леса до куста меньше, чем 100 метров. Это значит, что на виду у волка заяц пробежал $50-\frac{S}{2}$ метров со скоростью v метров в минуту, а оставшиеся $\frac{S}{2}$ метров со скоростью $\frac{2v}{3}$ метров в минуту, затратив на последние 50 метров

$$\frac{50-\frac{S}{2}}{v}+\frac{\frac{S}{2}}{\frac{2v}{3}}\ \text{минут.}$$

За это время, двигаясь со скоростью v метров в минуту, волк пробежал $50-\frac{S}{2}+\frac{3S}{4}$ метров, что согласно условию равно $S-10$ метров. Решая уравнение $50-\frac{S}{2}+\frac{3S}{4}=S-10.$ находим $S = 80$ метров.

6. Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Решение. Пусть E – точка касания сферы с прямой DB_1. Плоскость AB_1C_1D пересекает сферу по окружности, прямые DB_1 и DC_1 касаются этой окружности. Так как длины касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны, имеем $DE=DC_1=\sqrt{2}$. Проведем в плоскости AB_1C_1D через точку E прямую перпендикулярно DB_1 и точку ее пересечения с прямой B_1C_1 обозначим буквой F. Так как F есть точка пересечения перпендикуляров к касательным, проведенных в точках касания, то F есть центр указанной выше окружности, а центр сферы

O лежит на перпендикуляре к плоскости AB_1C_1D, проходящем через точку F.

Прямоугольные треугольники EB_1F и DB_1C_1 имеют общий острый угол и потому подобны. Значит, $\frac{EF}{EB_1}=\frac{DC_1}{B_1C_1}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. Учитывая, что

$$EB_1 = DB_1 - DE = \sqrt{18}-\sqrt{2}=2\sqrt{2},$$

находим $FC_1 = EF = 1$.

Проведем через точку F плоскость, перпендикулярную ребру B_1C_1. Точки ее пересечения с ребрами A_1D_1, AD, BC обозначим буквами P, Q, R соответственно. Проведем в плоскости $PFRQ$ через точку F перпендикуляр к прямой QF и точки пересечения этого перпендикуляра с прямыми QP и QR обозначим буквами L и M соответственно. Докажем, что прямая LM перпендикулярна плоскости AB_1C_1D и потому центр сферы O лежит на ней. Прямая B_1C_1 перпендикулярна плоскости $PFRQ$, а потому она перпендикулярна и прямой LM. По построению имеем также $LM \perp QF$. Итак, прямая LM перпендикулярна двум прямым B_1C_1 и QF, лежащим в плоскости AB_1C_1D, а потому она перпендикулярна этой плоскости. Значит, центр сферы лежит на прямой LM.

Обозначим буквой K проекцию точки O на плоскость $A_1B_1C_1D_1$. Так как наклонные OC_1 и OD_1 есть радиусы сферы, то есть имеют равную длину, то их проекции, то есть отрезки KC_1 и KD_1, также имеют равную длину. Но это значит, что точка K лежит в плоскости $A_1B_1C_1D_1$ на перпендикуляре к отрезку C_1D_1, проходящем через его середину N. Прямые OF и B_1C_1 перпендикулярны, это доказано ранее. По теореме о трех перпендикулярах можно утверждать, что и KF – проекция OF на плоскость $A_1B_1C_1D_1$ – перпендикулярна прямой B_1C_1. Учитывая, что прямая PF также перпендикулярна B_1C_1, заключаем, что точка K лежит на прямой PF. Итак, K есть точка пересечения прямой PF и перпендикуляра к C_1D_1, проходящего через точку N.

Для дальнейшего удобно вынести плоскость $PFRQ$ и все построенные в ней точки и прямые на отдельный чертеж. По доказанному выше центр сферы O лежит на пересечении прямой LM и перпендикуляра к PF, проведенного через точку K, причем K есть середина отрезка PF. Учитывая, что $PFRQ$ – квадрат, заключаем, что $OK = KF = \frac{1}{2}$. По теореме Пифагора, примененной к прямоугольному треугольнику OKC_1, находим

$$OC_1^2 = OK^2 + KC_1^2 = OK^2 + KF^2 + FC_1^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1=\frac{6}{4} \text{ и } OC_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

7. Ответ: $x = 2$, $y = 2$.

8. Ответ: $x < -6$, $-\frac{36}{7} < x < -4$, $x \geq 2$.

9. Ответ: -2.

10. Ответ: 2, $\sqrt{7}$.

11. Ответ: 5) 24 м.

12. Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Вариант 1

1. В арифметической прогрессии первый член отрицательный и равен -405, разность равна 18. Сумма абсолютных величин (модулей) первых n членов этой прогрессии равна 5661. Найдите n.

2. Решите неравенство

$$\frac{1+\log_{x-2}(-x^2+7x-10)}{2-\log_{5-x}(x^2-4x+4)} \leq 2.$$

3. Решите уравнение

$$\mathrm{tg}^2(5x + \sin^2 y) +$$

$$+\left|\frac{5x+\cos 2y}{3}+\frac{3}{5x+\cos 2y}\right|=4\cos^2\frac{7\pi}{4}.$$

4. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC длины 9 является биссектрисой острого угла BAD и делит четырехугольник на два треугольника с площадями $6\sqrt{2}$ и $12\sqrt{2}$. Этот четырехугольник вписан в окружность. Найдите ее радиус.

5. Найдите все значения параметра a, при которых система имеет решение

$$\begin{cases}64\cdot 25^{-\sqrt{y}}+(8-40a)\cdot 5^{-\sqrt{y}}-5a\le 0\\ 40\cdot 5^{-\sqrt{y}}=80\cdot 2^x+5a+a\cdot 2^{-x}.\end{cases}$$

6. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $AD = 3$. Высота пирамиды длиной $\frac{12}{\sqrt{23}}$ падает в точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Плоскость проходит через точку A, параллельна прямой BD, касается шара радиуса 1 с центром в точке S и пересекает ребро SC. В каком отношении она делит это ребро?

Вариант 2

7. В арифметической прогрессии первый член отрицательный и равен -376, разность равна 16. Сумма абсолютных величин (модулей) первых n членов этой прогрессии равна 5408. Найдите n.

8. Решите неравенство:

$$\frac{2+\log_{x+1}(-x^2+x+2)}{2-\log_{2-x}(x^2+2x+1)}\le 2.$$

9. Решите уравнение

$$\mathrm{tg}^2(7y+\cos^2 x)+$$
$$+\left|\frac{7y-\cos 2x}{3}+\frac{3}{7y-\cos 2x}\right|=4\sin^2\frac{5\pi}{4}.$$

10. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ BD длины 12 является биссектрисой острого угла ABC и делит четырехугольник на два треугольника с площадями $3\sqrt{15}$ и $6\sqrt{15}$. Этот четырехугольник вписан в окружность. Найдите ее радиус.

11. Найдите все значения параметра a, при которых система имеет решение

$$\begin{cases}16\cdot 4^{-\sqrt{x}}+(2-40a)\cdot 2^{-\sqrt{x}}-5a\le 0\\ 10\cdot 2^{-\sqrt{x}}=20\cdot 4^y+5a+a\cdot 4^{-y}.\end{cases}$$

12. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 1$ и $AD = 4$. Высота пирамиды длиной $\frac{20}{\sqrt{47}}$ падает в точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Плоскость проходит через точку A, параллельна прямой BD, касается шара радиуса 2 с центром в точке S и пересекает ребро SC. В каком отношении она делит это ребро?

Ответы и решения

1. Ответ: $n = 33$.

Решение. Делим 405 на 18 с остатком: $405 = 18\cdot 22 + 9$. Поэтому $a_{23} = -405 + 18\cdot 22 = -9$, $a_{24} = 9$. Так как $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{23}| = \frac{405+9}{2}\cdot 23 = 207\cdot 23 = 4761$, то $a_{24} + a_{25} + \ldots + a_n = 5661 - 4761 = 900$. Пусть в последней сумме k слагаемых. Тогда $a_n = 9 + 18(k-1) = 18k - 9$ и получаем уравнение $\frac{9+(18k-9)}{2}\cdot k = 900$, $9k^2 = 900$, $k^2 = 100$. Отсюда $k = 10$ и $n = 23 + k = 33$.

2. Ответ: $(2;3)\cup\left(\frac{7}{2};4\right)\cup(4;5)$.

Решение. Так как $-x^2 + 7x - 10 = (x-2)(5-x)$, то ОДЗ: $2 < x < 5$, $x \ne 3$, $x \ne 4$ и $\log_{5-x}(x-2) \ne 1$. На ОДЗ:

$$\frac{1+1+\log_{x-2}(5-x)}{2-2\log_{5-x}(x-2)}\le 2.$$

Пусть $\log_{x-2}(5-x) = y$, тогда

$$\log_{5-x}(x-2)=\frac{1}{y}\quad\text{и}\quad y\ne 1\ \text{(по ОДЗ)},$$

$\dfrac{2+y}{2-\dfrac{2}{y}} \le 2,\quad \dfrac{y(2+y)}{y-1}-4 \le 0,\quad \dfrac{y^2-2y+4}{y-1} \le 0.$

Но $y^2 - 2y + 4 > 0$ всегда, так как $D=-12<0$. Получаем $y<1$, $\log_{x-2}(5-x)<1$. На ОДЗ:

$$\begin{cases} x-2<1 \\ 5-x>x-2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-2>1 \\ 5-x<x-2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x<3 \\ x<\dfrac{7}{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x>3 \\ x>\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

и $x<3$ или $x>\dfrac{7}{2}$. Учитывая ОДЗ, получаем ответ.

3. Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{2\pi+2}{15} \\ y=\pm\arcsin\sqrt{\dfrac{\pi-2}{3}}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}, \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{-2\pi-4}{15} \\ y=\pm\arcsin\sqrt{\dfrac{4-\pi}{3}}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение. Правая часть равна 2. Так как $|a+\dfrac{1}{a}|\ge 2$ и $\mathrm{tg}^2 a\ge 0$, то получаем систему

$$\begin{cases} \mathrm{tg}^2(5x+\sin^2 y)=0 \\ \left|\dfrac{5x+\cos 2y}{3}+\dfrac{3}{5x+\cos 2y}\right|=2. \end{cases}$$

Так как $\left|a+\dfrac{1}{a}\right|=2$ только при $a=\pm 1$, то

$$\begin{cases} 5x+\sin^2 y=\pi n,\ n\in\mathbf{Z} \\ 5x+\cos 2y=\pm 3. \end{cases}$$

Отсюда $\sin^2 y - \cos 2y = \pi n \mp 3$; $\sin^2 y - (1 - 2\sin^2 y) = \pi n \mp 3$; $3\sin^2 y = \pi n + 1 \mp 3$.

1) $\sin^2 y=\dfrac{\pi n-2}{3}$. Так как $0\le \sin^2 y\le 1$, то $n = 1$. Тогда

$\sin^2 y=\dfrac{\pi-2}{3}$ и $x=\dfrac{1}{5}(\pi-\sin^2 y)=\dfrac{2\pi+2}{15}$.

Получаем

$$\begin{cases} \sin y=\pm\sqrt{\dfrac{\pi-2}{3}} \\ x=\dfrac{2\pi+2}{15}. \end{cases}$$

2) $\sin^2 y=\dfrac{\pi n+4}{3}$. Тогда $n = -1$, $\sin^2 y=\dfrac{4-\pi}{3}$ и $x=\dfrac{1}{5}(-\pi-\sin^2 y)=\dfrac{-2\pi-4}{15}$.

Получаем

$$\begin{cases} \sin y=\pm\sqrt{\dfrac{4-\pi}{3}} \\ x=\dfrac{-2\pi-4}{15}. \end{cases}$$

4. Ответ: $\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$.

Решение. Пусть $AB=a$, $AD=b$, $\angle BAC = \angle DAC=\alpha$, площадь $S_{ABC}=6\sqrt{2}$. Тогда

$S_{ABC}=\dfrac{a\cdot AC\cdot\sin\alpha}{2},\quad S_{ACD}=\dfrac{b\cdot AC\cdot\sin\alpha}{2}$

и $\dfrac{S_{ACD}}{S_{ABC}}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{12\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}=2$. Отсюда $b = 2a$. Так как $\angle BAC = \angle DAC$ и четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, то дуги BC и CD равны, и $BC = CD$. Тогда по теореме косинусов: $a^2 + AC^2 - 2a\cdot AC\cdot\cos\alpha = 4a^2 + AC^2 - 4a\cdot AC\cdot\cos\alpha$.

Отсюда $a=\dfrac{2}{3}AC\cos\alpha$. Тогда

$$S_{ABC}=\frac{1}{3}AC^2\cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{6}AC^2\sin 2\alpha.$$

Получаем $\dfrac{1}{6}\cdot 81\cdot\sin 2\alpha=6\sqrt{2}$,

$\sin 2\alpha=\dfrac{36\sqrt{2}}{81}=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$, $\cos 2\alpha=\sqrt{1-\dfrac{32}{81}}=\dfrac{7}{9}$

(>0, так как $\angle BAD$ острый по условию). Далее $\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ и

$a = \frac{2}{3} AC \cos\alpha = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}$. По теореме косинусов: $BD^2 = a^2 + 4a^2 - 4a^2 \cos 2\alpha = a^2(5 - 4\cos 2\alpha) = 32 \cdot \frac{17}{9}$. Отсюда $BD = \frac{4\sqrt{34}}{3}$ и радиус описанной окружности $R = \frac{BD}{2\sin 2\alpha} = \frac{4\sqrt{34} \cdot 9}{24 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{17}}{2}$.

5. Ответ: $a \in \left[\frac{4}{5}; \frac{72 - 16\sqrt{14}}{5}\right]$.

Решение. Положим $t = 5^{-\sqrt{y}} \in (0; 1]$. Неравенство принимает вид: $64t^2 + (8 - 40a)t - 5a \le 0$. Корни $t_1 = -\frac{1}{8}$, $t_2 = \frac{5a}{8}$. Следовательно, чтобы y существовал, необходимо и достаточно $a > 0$ и $0 < t \le \min\left(1, \frac{5a}{8}\right)$. Положим $2^x = z \in (0, +\infty)$. Тогда чтобы система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $40t = 80z + 5a + \frac{a}{z}$ хотя бы при одном $t \in \left(0; \min\left(1, \frac{5a}{8}\right)\right]$ имело корень $z > 0$. Получаем квадратное уравнение $80z^2 + (5a - 40t)z + a = 0$. Так как в точке $z = 0$ левая часть равна a и $a > 0$, то для существования корня $z > 0$ необходимо и достаточно: $z_{\text{верш}} > 0$ и существуют корни. Имеем:

$$\begin{cases} \frac{40t - 5a}{160} > 0 \\ (5a - 40t)^2 - 320a \ge 0 \\ 0 < t \le \min\left(1; \frac{5a}{8}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > \frac{a}{8} \\ 40t - 5a \ge \sqrt{320a} \\ t \le \min\left(1, \frac{5a}{8}\right). \end{cases}$$

$$40t - 5a \ge \sqrt{320a} \Leftrightarrow t \ge \frac{a}{8} + \sqrt{\frac{a}{5}}$$

$\left(> \frac{a}{8}\right.$, так как $a > 0$). Система принимает вид:

$$\begin{cases} t \ge \frac{a}{8} + \sqrt{\frac{a}{5}} \\ t \le 1 \\ t \le \frac{5a}{8}. \end{cases}$$

Чтобы эта система имела решение, необходимо и достаточно:

$$\begin{cases} \frac{a}{8} + \sqrt{\frac{a}{5}} \le 1 \\ \frac{a}{8} + \sqrt{\frac{a}{5}} \le \frac{5a}{8}. \end{cases}$$

Пусть $\sqrt{\frac{a}{5}} = q \ge 0$. Тогда $\frac{a}{8} = \frac{5q^2}{8}$. Первое неравенство примет вид: $\frac{5q^2}{8} + q - 1 \le 0$, $5q^2 + 8q - 8 \le 0$, $q_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{14}}{5}$. Тогда $\sqrt{\frac{a}{5}} \le \frac{2\sqrt{14} - 4}{5}$, $\frac{a}{5} \le \frac{72 - 16\sqrt{14}}{25}$, $0 < a \le \frac{72 - 16\sqrt{14}}{5}$. Второе неравенство дает: $\sqrt{\frac{a}{5}} \le \frac{a}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{5} \le a$.

6. Ответ: 1 : 2, считая от вершины S.

Решение. Пусть H – точка пересечения диагоналей AC и BD в прямоугольнике $ABCD$. Пусть данная в условии плоскость T пересекает SB в точке P, SD – в точке Q, SC – в точке L, SH – в точке M. Так как $BD \parallel T$, то $PQ \parallel BD$ и $M \in PQ$, $M \in AL$ (постройте рисунок). Пусть искомое отношение $\frac{SL}{LC} = y$. Пусть $LK \parallel MH$ и $K \in AC$. Тогда из подобия:

$$\frac{HK}{KC} = y, \quad \frac{AH}{HK} = \frac{y+1}{y},$$

$$\frac{LK}{SH}=\frac{1}{y+1},\quad \frac{MH}{LK}=\frac{AH}{AK}=\frac{y+1}{2y+1},$$

$$\frac{MH}{SH}=\frac{MH}{LK}\cdot\frac{LK}{SH}=\frac{y+1}{2y+1}\cdot\frac{1}{y+1}=\frac{1}{2y+1},$$

$$\frac{PQ}{BD}=\frac{SM}{SH}=\frac{2y}{2y+1}.$$

Тогда $\frac{V_{ASPQ}}{V_{ASBD}}=\frac{S_{SPQ}}{S_{SBD}}=\left(\frac{PQ}{BD}\right)^2=\left(\frac{2y}{2y+1}\right)^2.$ Высота пирамиды $SAPQ$, опущенная из точки S, равна радиусу R данного в задаче шара. Поэтому $\frac{V_{ASPQ}}{V_{ASBD}}=\frac{S_{APQ}\cdot R}{S_{ABD}\cdot SH}.$

Получаем $\frac{S_{APQ}\cdot R}{S_{ABD}\cdot SH}=\left(\frac{2y}{2y+1}\right)^2.$ Проведем через A плоскость, перпендикулярную BD. Пусть она пересекает BD в точке V, PQ – в точке U. Тогда $AV\perp BD$, $AU\perp PQ$, $UV\perp BD$, $UV\parallel SH$, $UV=MH$. Имеем $2S_{ABD}=AB\cdot AD=$ $=AV\cdot BD$. Пусть $AB=a$, $AD=b$, тогда $BD=\sqrt{a^2+b^2}$ и $AV=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Пусть $SH=h$. Тогда $UV=MH=\frac{h}{2y+1}$,

$$AU=\sqrt{AV^2+UV^2}=\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+\left(\frac{h}{2y+1}\right)^2}.$$

Имеем

$$\frac{S_{APQ}}{S_{ABD}}=\frac{PQ\cdot AU}{BD\cdot AV}=\frac{2y}{2y+1}\sqrt{1+\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\cdot\left(\frac{h}{2y+1}\right)^2}.$$

Получаем уравнение

$$\frac{2y}{2y+1}\sqrt{1+\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\cdot\left(\frac{h}{2y+1}\right)^2}\cdot\frac{R}{h}=\left(\frac{2y}{2y+1}\right)^2.$$

Сокращая на $\frac{2y}{2y+1}$, затем домножая на $2y+1$ и возводя в квадрат, приходим к уравнению

$$y^2\left(\frac{4h^2}{R^2}-4\right)-4y-\left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\cdot h^2+1\right)=0.$$

Подставляя $a=2$, $b=3$, $h=\frac{12}{\sqrt{23}}$, $R=1$, получаем $484y^2-92y-75=0$. Положительный корень этого уравнения равен $\frac{1}{2}$.

7. Ответ: $n=34$.

8. Ответ: $(-1;0)\cup\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(1;2)$.

9. Ответ: $\begin{cases}x=\pm\arccos\sqrt{\frac{\pi-2}{3}}+\pi k, k\in\mathbf{Z}\\ y=\frac{2\pi+2}{21},\end{cases}$

$\begin{cases}x=\pm\arccos\sqrt{\frac{4-\pi}{3}}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\\ y=\frac{-2\pi-4}{21}.\end{cases}$

10. Ответ: $4\sqrt{6}$.

11. Ответ: $a\in\left[\frac{1}{5};\frac{18-4\sqrt{14}}{5}\right]$.

12. Ответ: 2 : 1, считая от вершины S.

Факультет наук о материалах, Факультет биоинженерии и биоинформатики, Экономический факультет (отделение экономики)

Вариант 1

1. Решите уравнение
$$|-4^x+2^{x+5}-150|=150.$$
2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}(x-y)\sqrt{y+1}=0\\ \sqrt{x^2+6x+y+10}=-y^2-8y+x+2.\end{cases}$$
3. а) Решите уравнение
$$\frac{9(\sin x+\cos x)^2}{\cos 2x}+\frac{32(1+7\mathrm{ctg}x\mathrm{tg}4x)}{\mathrm{tg}x+7\mathrm{tg}4x}+7=0.$$

б) Найдите сумму всех корней этого уравнения, принадлежащих отрезку $[0;\ 120\pi]$, и выясните, что больше: эта сумма или число 23 040.

4. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Каждая его диагональ делит его площадь в отношении 2 : 3. Найдите тангенсы всех углов четырехугольника $ABCD$ и радиус окружности, описанной около четырехугольника, если наибольшая сторона его имеет длину 24.

5. Решите неравенство

$$4 + (\cos x)(\log_3 x)(\log_4 81) + \\ + (\sin^2 x)(\log_2 x^8) \le \\ \le 2\cos x - 4\cos 2x + \log_{\sqrt{2}} x^4.$$

6. Найдите все значения x, при которых наименьшее из чисел $(x+1)^3$ и $x^2 - 3x - 2$ меньше чем наименьшее из чисел $x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ и $x^2 + 5x + 4$.

Вариант 2

7. Решите уравнение

$$|-25^x + 5^{x+2} - 100| = 100.$$

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x-y)\sqrt{y-5} = 0 \\ \sqrt{x^2 - 6x + y + 4} = -y^2 + 4y + x + 8. \end{cases}$$

9. а) Решите уравнение

$$\frac{9\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} + \frac{2(1 + 8\operatorname{tg}x\operatorname{tg}4x)}{\operatorname{ctg}x + 8\operatorname{tg}4x} + 23 = 0.$$

б) Найдите сумму всех корней этого уравнения, принадлежащих отрезку $[0;\ 140\pi]$, и выясните, что больше: эта сумма или число 30 380.

10. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Каждая его диагональ делит его площадь в отношении 1 : 6. Найдите тангенсы всех углов четырехугольника $ABCD$ и радиус окружности, описанной около четырехугольника, если наибольшая сторона его имеет длину 48.

11. Решите неравенство

$$6 + (\cos x)(\log_3 x)(\log_2 81) + (\sin^2 x)(\log_2 x^{12}) \le \\ \le 4\cos x - 6\cos 2x + \log_{\sqrt{2}} x^6.$$

12. Найдите все значения x, при которых наименьшее из чисел $(x-2)^3$ и $x^2 - 9x + 16$ меньше чем наименьшее из чисел $x^3 - 6x^2 + 11x - 4$ и $x^2 - x - 2$.

Ответы и решения

1. Ответ: 5.

Решение. Положим $2^x = y > 0$. Получим $-y^2 + 32y - 150 = 150$ или $-y^2 + 32y - 150 = -150$. То есть $y^2 - 32y + 300 = 0$ или $y^2 - 32y = 0$. В первом уравнении дискриминант $D < 0$, из второго $y = 0$ (не подходит), либо $y = 32$ и $x = 5$.

2. Ответ:

$$\begin{cases} x = -6 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \dfrac{-7 + 3\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{-7 + 3\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения вытекают случаи.

1) $y = -1$. Тогда второе уравнение примет вид $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = x + 9$. Оно равносильно системе

$$\begin{cases} x + 9 \ge 0 \\ x^2 + 6x + 9 = (x+9)^2. \end{cases}$$

Второе уравнение дает $12x + 72 = 0$ и $x = -6$. Это решение удовлетворяет и первому неравенству*.

2) $y = x$. Тогда второе уравнение примет вид: $\sqrt{x^2 + 7x + 10} = -x^2 - 7x + 2$. Положим $\sqrt{x^2 + 7x + 10} = t \ge 0$. Тогда $-x^2 - 7x + 2 = -t^2 + 12$. Получаем $t = -t^2 + 12$ и $t^2 + t - 12 = 0$. Корни -4 и 3. Так как $t \ge 0$, то $t = 3$, то есть $\sqrt{x^2 + 7x + 10} = 3$. Отсюда $x^2 + 7x + 10 = 9$, $x^2 + 7x + 1 = 0$. Получаем два корня: $x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{45}}{2}$. При этом $y = x$

---

* Неверный путь решения: $x + 3 = x + 9$ ... . Верный путь: $|x + 3| = x + 9$ и разбор случаев.

и надо учесть ОДЗ: $y \geq -1$. Поэтому подходит только $y = x = \frac{-7+\sqrt{45}}{2} = \frac{-7+3\sqrt{5}}{2}$.

3. О т в е т: а) $\mathrm{arctg}4 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

б) $S = 120\mathrm{arctg}4 + 7140\pi$ и $S < 23040$.

Р е ш е н и е. а) ОДЗ: $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$, $\cos 4x \neq 0$, $\mathrm{tg}x + 7\mathrm{tg}4x \neq 0$. При умножении знаменателя второй дроби на $\mathrm{ctg}x$ получается выражение в скобке в числителе. Поэтому вторая дробь равна $32\mathrm{ctg}x$. Имеем $\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\cos 2x} =$

$$\frac{(\sin x+\cos x)^2}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)} =$$

$$\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x} = \frac{\mathrm{tg}x+1}{1-\mathrm{tg}x}$$

(последний переход получен делением числителя и знаменателя на $\cos x \neq 0$). Уравнение принимает вид:

$$\frac{9(\mathrm{tg}x+1)}{1-\mathrm{tg}x} + \frac{32}{\mathrm{tg}x} + 7 = 0.$$

Заменяя $\mathrm{tg}x$ на y, получаем:

$$\frac{9(y+1)}{1-y} + \frac{32}{y} + 7 = 0.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим $2y^2 - 16y + 32 = 0$ и $y^2 - 8y + 16 = 0$. (Если изначально все переводится в sin и cos, то получится $\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 16\cos^2 x = 0$ и после деления на $\cos^2 x$ придем к тому же уравнению). Отсюда $\mathrm{tg}x = y = 4$. Из равенства $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$ получаем, что $\cos^2 x = \frac{1}{17}$. Применяя дважды формулу $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, вычисляем $\cos 2x$ и $\cos 4x$; также, применяя дважды формулу $\mathrm{tg}2x = \frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2 x}$, вычисляем $\mathrm{tg}2x$ и $\mathrm{tg}4x$. Все условия из ОДЗ выполняются, то есть $x = \mathrm{arctg}4 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

б) $x = \mathrm{arctg}4 + \pi n \in [0; 120\pi]$ при $n = 0, 1, \ldots, 119$. Используя формулу для суммы членов арифметической прогрессии, получаем, что сумма всех корней данного уравнения, принадлежащих отрезку $[0; 120\pi]$, равна

$$S = 120\mathrm{arctg}4 + \pi\frac{(0+119)120}{2} =$$

$$= 120\mathrm{arctg}4 + 7140\pi.$$

Так как $\mathrm{arctg}4 \leq \frac{\pi}{2}$, то $S \leq 60\pi + 7140\pi = 7200\pi < 7200 \cdot 3{,}2 = 23040$.

4. О т в е т: тангенсы углов: $2\sqrt{6}$, $2\sqrt{6}$, $-2\sqrt{6}$, $-2\sqrt{6}$, $R = \frac{35}{\sqrt{6}}$.

Р е ш е н и е. Пусть заданное отношение площадей $m : n$ и $m < n$. Пусть $\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = m : n$ и $\frac{S_{BCD}}{S_{ABD}} = m : n$ (остальные случаи симметричны). Пусть диагонали пересекаются в точке K. Из отношения площадей треугольников ABC и ADC с общей стороной AC вытекает, что высоты, опущенные из B и D на AC, относятся как $m : n$. Прямоугольные треугольники, сторонами которых являются эти высоты и отрезки BK и DK, подобны (по двум углам). Поэтому также $BK : KD = m : n$. Аналогично получаем $CK : AK = m : n$, то есть $BK : KD = CK : AK$. Кроме того, углы BKC и AKD равны (как вертикальные). Следовательно, треугольники AKD и CKB подобны. При этом равны углы DAK и BCK, поэтому $AD \parallel BC$, то есть $ABCD$ – трапеция. Из подобия треугольников AKD и CKB вытекает, что $BC : AD = m : n$ и $AD > BC$. Пусть $AD = nx$, $BC = mx$. Так как трапеция вписана в окружность, то она равнобокая (так как дуга AB равна дуге CD). Так как она описана около окружности, то $AB + CD = AD + BC$. Отсюда $AB = CD = \frac{m+n}{2}x$, и AD – наибольшая сторона. Опустим перпендикуляр BH на AD. Тогда $AH = \frac{AD-BC}{2} = \frac{n-m}{2}x$. Отсюда $BH^2=AB^2-AH^2=mnx^2$, $BH=x\sqrt{mn}$. Тогда тангенсы двух углов четырехугольника равны $\frac{BH}{AH}=\frac{2\sqrt{mn}}{n-m}$, а два равны $\frac{2\sqrt{mn}}{n-m}$. Подставляя $m = 2$, $n = 3$, получаем первый ответ. Далее имеем: $HD=AD-AH=\frac{m+n}{2}x$ и $BD^2=HD^2+BH^2=\frac{m^2+6mn+n^2}{4}x^2$. Так как $\sin BAD=\frac{BH}{AB}=\frac{2\sqrt{mn}}{m+n}$, то по теореме синусов из треугольника ABD для радиуса описанной окружности R получаем:

$$R=\frac{BD}{2\sin BAD}=\sqrt{\frac{m^2+6mn+n^2}{4}}\frac{m+n}{4\sqrt{mn}}x.$$

Учитывая, что $x=\frac{AD}{n}$ и подставляя значения $m = 2$, $n = 3$, $AD = 24$, получаем второй ответ.

5. Ответ:

$$\left[\arccos\frac{1}{4};\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[2;\frac{3\pi}{2}\right]\times$$

$$\times\left[-\arccos\frac{1}{4}+2\pi n;\arccos\frac{1}{4}+2\pi n\right]\cup$$

$$\cup\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right],\ n, k\in \mathbf{Z},\ n\geq 1,\ k\geq 1.$$

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Вынося все показатели степени из логарифмов, используя тождество $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$, и группируя все слагаемые с логарифмом, приходим к неравенству:

$$\log_2 x(2\cos x + 8\sin^2 x - 8) \leq$$
$$\leq 2\cos x - 4\cos 2x - 4.$$

Так как $8\sin^2 x = 4 - 4\cos 2x$, то окончательно приходим к неравенству: $(\log_2 x - 1)(2\cos x - 4\cos 2x - 4) \leq 0$. Заменяя $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, получаем неравенство $(\log_2 x-1)\cos x\left(\cos x-\frac{1}{4}\right)\geq 0$. Оно сводится к объединению двух систем (учтем ОДЗ: $x > 0$):

$$\begin{cases}0<x\leq 2\\ 0\leq\cos x\leq\frac{1}{4},\end{cases}\quad \begin{cases}x\geq 2\\ \cos x\leq 0 \text{ или } \cos x\geq\frac{1}{4}.\end{cases}$$

Ответ получаем на тригонометрическом круге.

6. Ответ: $\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)\cup(-1;+\infty)$.

Замечание. Неравенства, получающиеся из сравнения чисел в паре, не решаются.

Решение. Условие задачи равносильно тому, что хотя бы одно из чисел первой пары меньше чем оба числа из второй пары. Получаем объединение двух систем:

$$\begin{cases}(x+1)^3<x^3+3x^2+2x+2\\ (x+1)^3<x^2+5x+4\end{cases}\quad\text{или}$$

$$\begin{cases}x^2-3x-2<x^3+3x^2+2x+2\\ x^2-3x-2<x^2+5x+4\end{cases}$$

Преобразуя, получаем

$$\begin{cases}x<1\\ x^3+2x^2-2x-3<0\end{cases}\quad\text{или}$$

$$\begin{cases}x^3+2x^2+5x+4>0\\ 8x>-6.\end{cases}$$

Кубические многочлены раскладываются на множители с учетом того, что есть корень $x = -1$. Получаем системы

$$\begin{cases}x<1\\ (x+1)\left(x-\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)<0\end{cases}$$

$$\text{или}\quad\begin{cases}(x+1)(x^2+x+4)>0\\ x>-\frac{3}{4}.\end{cases}$$

Решая эти системы методом интервалов, получаем ответ.

7. Ответ: 2.

8. Ответ: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = \dfrac{5+3\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{5+3\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$

9. Ответ: а) $\operatorname{arctg}(-4) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;
б) $S = 140\operatorname{arctg}(-4) + 9870\pi$
и $S > 30380$.

10. Ответ: тангенсы углов: $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, $-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, $-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, $R = \dfrac{7\sqrt{73}}{\sqrt{6}}$.

11. Ответ: $\left[\arccos\dfrac{1}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[2; \dfrac{3\pi}{2}\right] \cup$
$\cup\left[-\arccos\dfrac{1}{3} + 2\pi n; \arccos\dfrac{1}{3} + 2\pi n\right] \cup$
$\cup\left[\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $n, k \in \mathbf{Z}$, $n \geq 1$, $k \geq 1$.

12. Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Геологический факультет, Высшая школа государственного аудита, Высшая школа бизнеса, Высшая школа современных социальных наук, Московская школа экономики, Социологический факультет, Факультет государственного управления, Экономический факультет
(отделение менеджмента и вечернее отделение)

Вариант 1

1. Докажите, что при $a = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ число $6a - a^3$ – целое, и найдите это число.

2. Спортсмены Иванов и Петров участвовали в марафоне. Первую половину пути Иванов бежал в два раза быстрее Петрова. Потом он подвернул ногу и оставшуюся половину пути бежал в два раза медленнее Петрова. Петров же все время бежал с постоянной скоростью и пробежал всю дистанцию за 4 часа. Сколько времени понадобилось Иванову, чтобы добраться до финиша?

3. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}2\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$, а $\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right) < 0$.

4. Решите неравенство
$$4^{\log_9(x^2+4x-5)} \leq 2^{\log_3(1+8x-x^2)}.$$

5. В трапеции $ABCD$ основание AD в полтора раза длиннее основания BC, а длины боковых сторон AB и CD равны. На стороне BC взята такая точка K, что $BK = 2KC$. Прямые AK и CD пересекаются в точке E, а прямые DK и AB – в точке F. Найдите величину отношения $BF : CE$.

6. Найдите наименьшее и наибольшее значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x-a} + \sqrt{x^3+1} = 2$ имеет хотя бы одно решение.

Вариант 2

7. Докажите, что при $c = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}$ число $c^3 + 9c$ – целое и найдите это число.

8. Рабочие Лопатин и Совков копали яму. Сначала Совков ленился и копал в полтора раза медленнее Лопатина. Через 15 минут, когда они выкопали треть ямы, Лопатин возмутился медлительностью Совкова, и тот стал копать в полтора раза быстрее Лопатина. За какое время они выкопали яму, если Лопатин все время копал с постоянной скоростью?

9. Найдите $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}2\alpha$, если известно, что $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, а $\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) < 0$.

10. Решите неравенство
$$3^{\log_2(6+x-x^2)} \leq 9^{\log_4(x^2-5x-2)}.$$

11. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Через точку E проведена прямая, параллельная CD и пересекающая основания трапеции AD и BC в точках F и G соответственно. Найдите величину отношения $\frac{EF}{EG}$, если известно, что $AF = 2BG$.

12. Найдите наименьшее и наибольшее значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{a^3 - x^3} + \sqrt{1-x} = 4$ имеет хотя бы одно решение.

Ответы и решения

1. Ответ. –6.

Решение. Имеем

$$a^3 = (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^3 =$$
$$= 2 + 3\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{16} + 4 =$$
$$= 6 + 3\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{32} = 6 + 6\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{4} \quad \text{и}$$
$$6a - a^3 = -6.$$

2. Ответ. 5 часов.

Решение. Петров на весь путь потратил 4 часа. Значит, полпути он пробегал за 2 часа. Первую половину пути Иванов бежал вдвое быстрее Петрова, а потому потратил на нее 1 час. Вторую половину пути Иванов бежал вдвое медленнее Петрова, и, значит, потратил на нее 4 часа. Время, затраченное Ивановым на весь пробег, равно $1 + 4 = 5$ часов.

Замечание. Можно, конечно, решать эту задачу, вводя неизвестные и составляя уравнения. Например, можно обозначить буквой v скорость Петрова и буквой S длину пути. Уравнение, связывающее эти величины, имеет вид $S = 4v$, а искомая величина есть

$$\frac{\frac{S}{2}}{2v} + \frac{\frac{S}{2}}{\frac{v}{2}} = \left(\frac{1}{4} + 1\right)\frac{S}{v} = 5.$$

3. Ответ. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$.

Решение. Имеем

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \frac{8}{9}.$$

Кроме того, по условию

$$0 > \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha.$$

Из этого неравенства, поскольку $\sin\alpha = \frac{1}{3} > 0$, следует, что $\cos\alpha < 0$. Значит, $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Теперь находим

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} =$$
$$= \frac{2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{-2\sqrt{2}}{3}}{\frac{8}{9} - \frac{1}{9}} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

4. Ответ. $1 < x \le 3$.

Решение. Пользуясь формулами $4^t = 2^{2t}$, $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ при $a = 9$, $c = 3$, $b = x^2 + 4x - 5$, находим

$$4^{\log_9(x^2+4x-5)} = 2^{2\log_9(x^2+4x-5)} = 2^{\log_3(x^2+4x-5)}.$$

Поэтому данное неравенство можно переписать в виде

$$2^{\log_3(x^2+4x-5)} \le 2^{\log_3(1+8x-x^2)}.$$

Функции 2^t и $\log_3 t$ монотонно возрастают на своих областях определения, поэтому последнее неравенство равносильно неравенству

$$\log_3(x^2 + 4x - 5) \le \log_3(1 + 8x - x^2),$$

а также двойному неравенству

$$0 < x^2 + 4x - 5 \le 1 + 8x - x^2$$

и, следовательно, системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0 \\ x^2 - 2x - 3 \le 0. \end{cases}$$

Множество решений первого неравенства состоит из двух областей $x < -5$ и $x > 1$. Решения второго неравенства составляют промежуток $-1 \le x \le 3$. Множество же решений системы неравенств имеет вид $1 < x \le 3$.

5. Ответ. $\frac{14}{5}$.

Решение. Треугольники AFD и BFK имеют по паре равных углов и потому подобны. Следовательно, $\frac{AF}{BF} = \frac{AD}{BK}$. Учитывая, что $BK = \frac{2}{3}BC = \frac{4}{9}AD$, заключаем $\frac{AF}{BF} = \frac{9}{4}$ и $\frac{AB}{BF} = \frac{AF}{BF} - 1 = \frac{5}{4}$, $BF = \frac{4}{5}AB$.

Точно так же, пользуясь подобием треугольников AED и KEC, находим равенства

$$\frac{DE}{CE} = \frac{AD}{KC} = \frac{9}{2}, \quad \frac{CD}{CE} = \frac{DE}{CE} - 1 = \frac{7}{2},$$

$$CE = \frac{2}{7}CD.$$

Теперь, поскольку $AB = CD$, имеем

$$\frac{BF}{CE} = \frac{\frac{4}{5}AB}{\frac{2}{7}CD} = \frac{14}{5}.$$

6. Ответ. Наибольшее значение параметра равно $\sqrt[3]{3}$, а наименьшее равно -5.

Решение. При любом a функция $\sqrt{x-a} + \sqrt{x^3+1}$ определена на множестве чисел x, для которых выполнено $x \geq a$, $x^3 + 1 \geq 0$, то есть на множестве чисел, одновременно удовлетворяющих неравенствам

$$x \geq a, \quad x \geq -1. \qquad (1)$$

При любом x из этого множества имеем

$$\sqrt{x-a} + \sqrt{x^3+1} \geq \sqrt{x^3+1}$$

и при $\sqrt{a^3+1} > 2$, то есть при $a > \sqrt[3]{3}$ находим $\sqrt{x^3+1} \geq \sqrt{a^3+1} > 2$, так что данное уравнение при $a > \sqrt[3]{3}$ решений не имеет.

Для любого x, удовлетворяющего условиям (1) верно $\sqrt{x-a} + \sqrt{x^3+1} \geq \sqrt{x-a}$, так что при $\sqrt{-1-a} > 2$, то есть при $a < -5$ выполняется $\sqrt{x-a} \geq \sqrt{-1-a} > 2$. Значит данное уравнение не имеет решений и при $a < -5$.

При $a = \sqrt[3]{3}$ данное уравнение имеет корень $\sqrt[3]{3}$, а при $a = -5$ оно имеет корень -1.

Решение 2. Это решение находит не только искомые наименьшее и наибольшее значения параметра a, но и все множество параметров, при которых разрешимо данное уравнение. Но оно использует непрерывность функции, стоящей в левой части уравнения.

Как доказано раньше, при любом a функция $\sqrt{x-a} + \sqrt{x^3+1}$ определена на множестве $x \geq b = \max(a, -1)$. Эта функция есть сумма двух возрастающих функций и потому возрастает. Она непрерывна и принимает сколь угодно большие значения. Поэтому уравнение будет разрешимо в том и только том случае, когда наименьшее значение функции, то есть $f(b)$ не превосходит 2. Итак, условием разрешимости является выполнение неравенства $f(b) \leq 2$. Рассмотрим отдельно два случая.

а) Пусть $a \geq -1$. Тогда $b = a$, $f(b) = \sqrt{a^3+1}$ и условие разрешимости принимает вид $\sqrt{a^3+1} \leq 2$.

Это неравенство на множестве $a \geq -1$ равносильно неравенству $a^3 + 1 \leq 4$. Решая последнее неравенство, находим $a^3 \leq 3$ и $a \leq \sqrt[3]{3}$. Искомое множество значений параметра в первом случае имеет вид $-1 \leq a \leq \sqrt[3]{3}$.

б) Пусть $a < -1$. Тогда $b = -1$, $f(b) = \sqrt{-1-a}$ и условие разрешимости принимает вид

$$\sqrt{-1-a} \leq 2.$$

Это неравенство на множестве $a < -1$ равносильно неравенству $-1 - a \le 4$. Решая последнее неравенство, находим $a \ge -5$. Искомое множество значений параметра во втором случае имеет вид $-5 \le a < -1$.

Объединяя найденные множества, находим множество значений параметра a, при которых данное уравнение имеет решение $-5 \le a \le \sqrt[3]{3}$.

7. Ответ: -6.

8. Ответ: 35 минут.

9. Ответ: $-\frac{4}{5}, \frac{24}{7}$.

10. Ответ: $(-2, -1]$.

11. Ответ. $\sqrt{2}$.

Решение. Обозначим $\frac{EF}{EG} = x$. Треугольники AEF и EGC имеют по паре равных углов и потому подобны. Следовательно,

$$\frac{AF}{CG} = \frac{EF}{EG} = x, \text{ и } AF = xCG.$$

Точно так же, пользуясь подобием треугольников FED и EBG, находим равенства

$$\frac{FD}{BG} = \frac{EF}{EG} = x, \quad BG = \frac{1}{x}FD.$$

Теперь, поскольку $CG = FD$, имеем

$$2 = \frac{AF}{BG} = x^2\frac{CG}{FD} = x^2 \text{ и } x = \sqrt{2}.$$

12. Ответ: -15 и $\sqrt[3]{17}$.